

Υπολογιστική Γεωμετρία: Το πρόβλημα της φύλαξης μουσείου (*Computational Geometry: The Art Gallery problem*)

Η δημιουργία ενός **δικτύου επικοινωνίας** το οποίο να μπορεί να καλύπτει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό αιτημάτων για επικοινωνία με φθινό και αξιόπιστο τρόπο είναι ένα από τα ζητούμενα που προσπαθεί να καλύψει η τεχνολογία με την εξέλιξη των **ενσύρματων** (οπτικά δίκτυα) και των **ασύρματων** (κινητά τηλέφωνα) δικτύων επικοινωνίας.

Ειδικότερα, η μεγάλη ζήτηση για φθινή και αξιόπιστη ασύρματη επικοινωνία έχει δημιουργήσει πολλά προβλήματα έρευνας με τα οποία ασχολούνται αρκετοί επιστήμονες. Η δημιουργία, συντήρηση, επέκταση και λειτουργία ενός ασύρματου δικτύου επικοινωνίας έχει πολύ μεγάλα έξοδα αλλά συγχρόνως και προσδοκίες για μεγάλα έσοδα. Συνεπώς η **έξυπνη δημιουργία** του δικτύου, δηλαδή με τρόπο τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιούνται τα έξοδα είναι μια καθοριστική παράμετρος.

Ένα δίκτυο ασύρματης επικοινωνίας αποτελείται από ένα σύνολο **σταθμών - πομποδεκτών** οι οποίοι εκπέμπουν και λαμβάνουν πληροφορίες. Τα χαρακτηριστικά του κάθε σταθμού και η ποιότητά του καθορίζουν και την ποιότητα ολόκληρου του δικτύου. Το κόστος κατασκευής και συντήρησης του δικτύου, εξαρτάται από το πλήθος των σταθμών του. Αρχικά συνήθως καθορίζεται μια μικρή περιοχή που πρέπει να καλύπτεται από τους σταθμούς - πομποδέκτες, η οποία στη συνέχεια διευρύνεται. Μερικοί από τους παράγοντες που πρέπει να συνυπολογιστούν προκειμένου να κατασκευαστεί ένας νέος σταθμός είναι:

- το κόστος του σταθμού και το κόστος της ενοικίασης της περιοχής στην οποία θα τοποθετηθεί,
- παράπονα των κατοίκων για έκθεση στην ακτινοβολία και γεωγραφικές ιδιαιτερότητες της περιοχής προς κάλυψη.

Ένας συνηθισμένος στόχος είναι η κάλυψη μιας γεωγραφικής περιοχής τοποθετώντας τον ελάχιστο αριθμό σταθμών. Άλλος στόχος είναι η τοποθέτηση ενός δεδομένου αριθμού σταθμών έτσι ώστε να καλύπτεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος κάποιας περιοχής.

Η περιοχή μπορεί να έχει σημεία με διαφορετική **προτεραιότητα κάλυψης**. Για παράδειγμα μπορεί στην περιοχή προς κάλυψη να υπάρχει μια λίμνη την οποία μας ενδιαφέρει να καλύψουμε *αφού* έχουμε καλύψει την υπόλοιπη περιοχή. Επίσης μπορεί να είναι ανάγκη να καλύψουμε κατά προτεραιότητα περιοχές με μεγάλο πληθυσμό (αστικά κέντρα, κοκ). Ένα ακόμη λοιπόν ρεαλιστικό πρόβλημα έρευνας είναι το εξής: με δεδομένο ένα **όριο κόστους** που δεν πρέπει να ξεπεραστεί να τοποθετηθούν σταθμοί σε μια δεδομένη περιοχή με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτεται ένα μέγιστο μέρος της περιοχής, λαμβάνοντας υπόψιν τις προτεραιότητες κάλυψης.

Επιπλέον θα θέλαμε η επέκταση του δικτύου να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το κόστος της συνολικής επένδυσης να είναι ελάχιστο. Θα θέλαμε, για παράδειγμα, να αποφύγουμε την κατάργηση σταθμών.

Ανάλογα με τον τρόπο επικοινωνίας μπορούμε να έχουμε δίκτυα στα οποία:

- δύο σημεία για να επικοινωνήσουν μεταξύ τους πρέπει κάθε ένα από αυτά να μπορεί να επικοινωνήσει με κάποιο σταθμό του δικτύου (**point to station communication**), π.χ., δίκτυα κινητής τηλεφωνίας.
- δύο σημεία επικοινωνούν μεταξύ τους χωρίς τη μεσολάβηση κάποιου σταθμού (**point to point communication**), π.χ., επικοινωνία με χρήση *walkie talkies*.

Και στις δύο περιπτώσεις η επικοινωνία γίνεται σε υψηλές συχνότητες (π.χ., 900 MHz, 1800 MHz, 1900 MHz, κλπ). Σε αυτές τις συχνότητες τα προβλήματα απώλειας ενέργειας από ανάκλαση και διάθλαση είναι υπολογίσιμα. Τα προβλήματα αυτά εξαφανίζονται αν απαιτήσουμε η επικοινωνία μεταξύ ενός σημείου και ενός σταθμού να είναι δυνατή εάν ο σταθμός είναι ορατός από το σημείο. Έτσι λοιπόν για να είναι δυνατή η επικοινωνία μεταξύ δύο σημείων θα πρέπει: είτε κάθε ένα από αυτά να **βλέπει** κάποιο σταθμό (point to station) ή να **βλέπονται** μεταξύ τους (point to point).

Το αν δύο σημεία βλέπονται εξαρτάται από την τοπολογία της γεωγραφικής περιοχής. Το μοντέλο λοιπόν που θα χρησιμοποιηθεί πρέπει να διατηρεί τις ιδιότητες της γεωγραφικής περιοχής που αφορούν την ορατότητα. Σαν γεωμετρικό μοντέλο της περιοχής χρησιμοποιούμε ένα **απλό πολύγωνο**. Η γεωγραφική περιοχή προς κάλυψη αναπαριστάται με το εσωτερικό και την περίμετρο του πολυγώνου. Δύο σημεία μέσα στο πολύγωνο ή πάνω στην περίμετρο του είναι ορατά το ένα στο άλλο, αν και μόνο αν υπάρχει μια ευθεία γραμμή που τα ενώνει η οποία βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο πολύγωνο.

Διάφορα προβλήματα κάλυψης πολυγώνων έχουν μελετηθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Το 1976 κατά τη διάρκεια ενός συνεδρίου ο *Victor Klee* έθεσε το ακόλουθο πρόβλημα γνωστό και ως **πρόβλημα του μουσείου (art gallery)**: πόσοι φύλακες χρειάζονται για να βλέπουν κάθε σημείο στο εσωτερικό μιας γκαλερί; Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος είναι ένα πολύγωνο το οποίο αντιστοιχεί στο πάτωμα του μουσείου (κάτοψη). Τα προβλήματα που έχουν ερευνηθεί (βλ. π.χ., [1, 2]) μπορούν να ταξινομηθούν με βάση διάφορα κριτήρια όπως:

- πού επιτρέπεται να τοποθετηθούν φύλακες (στις κορυφές του πολυγώνου, στις πλευρές του πολυγώνου ή οπουδήποτε μέσα στο πολύγωνο) και τι θέλουμε να φρουρήσουμε (την περίμετρο του πολυγώνου, το εσωτερικό του πολυγώνου),
- εάν το πολύγωνο είναι απλό, ορθογώνιο, κλπ.

Τα προβλήματα που προτείνονται για έρευνα είναι παραλλαγές του προβλήματος του μουσείου όπως:

- πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε φύλακες (ή σταθμούς) σε ένα πολύγωνο έτσι ώστε να καλύπτουμε ένα μέγιστο μήκος της περιμέτρου του,
- πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε φύλακες (ή σταθμούς) σε ένα πολύγωνο του οποίου η περίμετρος έχει αξίες έτσι ώστε να καλύπτουμε τη μέγιστη αξία,
- πώς μπορούμε να καλύψουμε ένα μέγιστο εμβαδόν του εσωτερικού του πολυγώνου.

Για όλα τα παραπάνω προβλήματα ο σκοπός είναι η σχεδίαση και ανάλυση νέων αλγόριθμων.

Αναφορές

- [1] O'Rourke, J., Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford Univ. Press, New York, 1987.
 [2] Urrutia, J., Art gallery and Illumination Problems, Handbook on Comput. Geometry, 1998.